Équations différentielles vectorielles linéaires

EDL scalaire d'ordre I

I intervalle de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $D = \{x \in \mathbb{R}, \alpha(x) \neq 0\} = \bigsqcup_{j \in J} I_j$
$a = \frac{-\beta}{\alpha}$, $b = -\frac{\gamma}{\alpha} \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$

- Éq. générale : (L_G) : $\alpha(t) y' + \beta(t) y + \gamma(t) = 0$ sur I
- Éq. résolue en y' : (L) : $y' = a(t) y + b(t)$ sur I_j
- Éq. homogène associée : (LH) : $y' = a(t) y$ sur I_j

1. Détermination de D et passage à l'éq. résolue.
2. Résolution de (L) indépendante sur chaque I_j
3. Recollement des solutions.

$\mathcal{S}(LH) = \mathrm{Vect}\{t \mapsto e^{A(t)}\}$ où A primitive de a

↳ $[y \in \mathcal{S}(LH)] \Leftrightarrow [\forall t \in I_j, \quad y' - a(t) y = 0]$
$\Leftrightarrow [\forall t \in I_j, \quad (y' - a(t) y) e^{-A(t)} = 0]$ car $\exp > 0$
$\Leftrightarrow [\forall t \in I_j, \quad \frac{d}{dt}(y e^{-A(t)}) = 0]$
$\Leftrightarrow [\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in I_j, \quad y = \lambda e^{A(t)}]$

Th. de superposition $\mathcal{S}(L) = \mathcal{S}(LH) + y_p$ où y_p solution particulière

↳ $[y \in \mathcal{S}(L)] \Leftrightarrow [\forall t \in I_j, \quad y' - a(t) y = 0 = y_p' - a(t) y_p]$
$\Leftrightarrow [\forall t \in I_j, \quad (y - y_p)' - a(t)(y - y_p) = 0]$
$\Leftrightarrow [y - y_p \in \mathcal{S}(LH)]$

$\mathcal{S}(L)$ est sous-espace affine de dim 1 de $\mathcal{C}^1(I_j, \mathbb{R})$.
$\mathcal{S}(L_G)$ est sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ($\emptyset$ d'info sur dim).

Variation de la constante

Chercher y_p de la forme Ωe^A où $\Omega \in \mathcal{C}^1(I_j, \mathbb{R})$ donne $\Omega' = b e^{-A}$: primitiver pour trouver y_p.

Problème de Cauchy

$(P) = (L) \wedge (y(t_0) = y_0)$ avec $(y_0, t_0) \in \mathbb{R} \times I$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

$\mathcal{S}(P) = \left\{ t \mapsto \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b e^{-\int_{t_0}^{\cdot} a} \right) e^{\int_{t_0}^{t} a} \right\}$ (existence et unicité de la solution)

↳ Prendre $A = \int_{t_0}^{\cdot} a$ s'annulant en t_0

Raisonnements graphiques sur la non intersection des courbes représentatives des solutions.

E Kev de dim n, e base de E, I intervalle de $\mathbb{R}$
$a : I \to \mathcal{L}(E)$, $b : I \to E$ continues, $y_i : I \to E$ dérivable $\forall i$, $y = \sum y_i e_i$

EDL vectorielle d'ordre I $\quad (L) : Y' = AY + B$

$(LH) : Y' = AY$

Problème de Cauchy $\quad (P) = (L) \wedge (Y(t_0) = Y_0)$

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (P) admet une unique sol.
↳ Admis

▶ Résultats similaires : th de superposition, structures de $\mathcal{S}(LH)$, $\mathcal{S}(L)$

Système fondamental de (L) base de $\mathcal{S}(LH)$

Wronskien de $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ $\quad w : I \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \det(\mathrm{Mat}((\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t), e))$

$[(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ syst. fond.$] \Leftrightarrow [\exists t_0 \in I, w(t_0) \neq 0] \Leftrightarrow [\forall t \in I, w(t) \neq 0]$

↳ Soit $t_0 \in I$. $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}(LH) \to E$, $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$ est un isomorphisme. Alors :

$[$syst. fond.$] \Leftrightarrow [(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ base de $\mathcal{S}(LH)]$
$\Leftrightarrow [(\varphi_1(t_0), \dots \varphi_n(t_0))$ base de $E]$
$\Leftrightarrow [w(t_0) \neq 0]$ valide pour tout $t_0 \in I$.

Variation des constantes

On suppose $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ fondamental. On cherche $\varphi : I \to E$ solution de (L).

Pour tout $t \in I$, $(\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$ base de E. Il existe donc $\lambda_1, \dots \lambda_n$ telles que $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$.

Alors pour tout i, $\lambda_i' \varphi_i = b_i$

▶ 1. Étude des solutions constantes
2. Étude des solutions à valeurs dans un intervalle délimité par les csts.

Recherche d'un syst. fond. si A constante

1. Trigonaliser $A = PTP^{-1}$ dans $\mathbb{C}$ (diagonaliser si possible)
2. $Z = P^{-1}Y$ est solution de $Z' = TZ$.

   Calcul de z_i tel que $z_i' = \lambda_i z_i + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} z_k}_{\text{nul si } T \text{ diagonale}}$ selon i décroissant
3. En déduire les solution complexes $Y = PZ$ de (LH).
4. Pour obtenir le système fondamental dans $\mathbb{R}$: conserver les solution réelles, remplacer les solutions complexes (conjugées) $(Y, \overline{Y})$ par $\left(\frac{Y+\overline{Y}}{2}, \frac{Y-\overline{Y}}{2i}\right)$

EDL scalaire d'ordre II

- Se ramener à une EDL vectorielle d'ordre I :

$$\left[y'' + ay' + by = c\right] \Leftrightarrow \left[Y' = AY + B\right] \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -a & -b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

- Wronskien de (u, v) : $t \mapsto \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$

- Variation de la constante : $y = zu$ où $u \in \mathcal{S}(LH)$ ne s'annule pas

- Variation des constantes :

$$\begin{cases} y = \lambda u + \mu v \\ y' = \lambda u' + \mu v' \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \lambda, \mu \text{ dérivables} \\ (u, v) \text{ système fondamental} \end{cases}$$

- Stratégie usuelle :
  1. Recherche de u sous forme de DSE
  2. Obtention de v à partir de u, par variation de la constante, pour former un syst fondamental
  3. Recherche de solution particulière par variation des constantes

Exponentielle d'endomorphisme

- $t \mapsto e^{tu}$ dérivable, de dérivée $u \circ e^{tu} = e^{tu} \circ u$

- $\begin{cases} y' = u(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ a pour solution $e^{(t-t_0)u}(y_0)$