Intégration

Partage de $[a;b]$ $\sigma = (a_0, \dots a_n)$ tel que $a = a_0 < a_1 \dots < a_n$

Pas du partage $\alpha(\sigma) = \max\limits_{i \in [\![0,n]\!]} |a_{i+1} - a_i|$

Pointage du partage $c = (c_0, \dots c_{n-1})$ tel que $a_i \leq c_i \leq a_{i+1}$

Intégrale d'une fonction en escalier

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(c_i) \quad \text{avec } (\sigma = (a_0, \dots a_n), c) \text{ adapté à } f$$

- On peut prouver les résultats usuels sur l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire, positivité, croissance
- Inégalité triangulaire sur les intégrales : vérifier le signe de a-b.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n \quad \text{où } (\varphi_n \text{ en escalier})_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[{[a;b]}]{u} f$$

Théorème des sommes de Riemann

$$S_f(\sigma, c) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(c_i), \quad \left\| \int_a^b f - S_f(\sigma, c) \right\| \xrightarrow[\alpha(\sigma) \to 0]{} 0$$

$$f \geq 0, \ \mathcal{C}, \ \neq \tilde{0} \Rightarrow \int_a^b f > 0$$

Valeur moyenne de f sur $[a;b]$ $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$

Inégalité de la moyenne $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \|f\|_\infty |b-a|$

Égalité de la moyenne $\exists k \in [\min\limits_{[a;b]} f, \max\limits_{[a;b]} f], \ \int_a^b fg = k \int_a^b \underbrace{g}_{\text{signe constant}}$

Intégrale de $f : \mathbb{R} \to F$

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{p} \Big(\int_a^b \underbrace{f_i}_{\text{CPM}} \Big) e_i$$

- On ne change pas l'intégrale en modifiant un nombre fini de points : $f = g + \varphi$ avec φ en escalier, nulle en un nombre fini de points, puis $\int_a^b f = \int_a^b g + \underbrace{\cancel{\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\varphi(c_i)}}_{=0}$
- On peut donc étendre la définition de l'intégrale à f définie sur $I \setminus \{a\}$ si f prolongeable par $\mathcal{C}$ en a.
- Voir l'intégrale comme une somme de Riemann. Fonctionne très bien avec $\int \ln(f(t))\,dt$.

Intégrales fonction des bornes

$I : x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f$ où f continue par morceaux

Propriété des intégrales fonction des bornes

- $[a, b \text{ continues}] \Rightarrow [I \text{ continue}]$
- $\begin{bmatrix} a, b \text{ dérivable} \\ f \text{ continue} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I \text{ dérivable} \\ I' = b'(f \circ b) - a'(f \circ a) \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a, b & \mathcal{C}^{k+1} \\ f & \mathcal{C}^{k} \end{bmatrix} \Rightarrow [I \ \mathcal{C}^{k+1}]$

↳ S'obtient avec $I = F \circ b - F \circ a$ où F primitive de f

Primitive de f

F telle que $F' = f$

▶ $[F \text{ primitive}] \Leftrightarrow [\exists t, \ F = F_0 + t]$ En particulier, il existe une unique primitive s'annulant en x_0.

▶ Étude asymptotique lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$: étude de $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} =: L$
- Si L non définie, on ne peut rien dire.
- Si $L = 0$: branche parabolique d'axe (Ox)
- Si $L = \infty$: branche parabolique d'axe (Oy)
- Si $L \in \mathbb{R}^*$: asymptote oblique ⇝ étude de $f(x) - Lx + \beta$

▶ Erreur lors du calcul approché de $\int_a^b f$ par n :
- rectangles : $O(\frac{1}{n})$
- trapèzes : $O(\frac{1}{n^2})$

Théorème fondamental de l'analyse

$[f \text{ continue sur } [a,b]] \Rightarrow [f \text{ admet une primitive } F, \text{ et } \int_a^b f = F(b) - F(a)]$

Intégration par parties

$\int f g' = [fg] - \int f' g \quad (f, g \ \mathcal{C}^1)$

▶ $\int f g^{(n)} = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i f^{(i)} g^{(n-1-i)} \right] + (-1)^n \int f^{(n)} g$

Taylor (reste intégral)

$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt$

Changement de variable

$\varphi \ \mathcal{C}^1, f \ \mathcal{C}^0$: $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b \varphi' (f \circ \varphi)$

↳ Dérivation de $x \mapsto \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f - \int_a^x \varphi' (f \circ \varphi)$

▶ Intégration sur $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$: la constante d'intégration dépend de i.

Intégrales impropres

▶ Analogie avec les séries.

Soient $f : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ CPM, de primitive F, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Intégrale impropre / généralisée convergente

$I = [a; b[$: $\left[\int_I f \text{ convergente}\right] \iff \left[\lim_{b^-} F \text{ existe}\right]$

$I =]a; b]$: $\left[\int_I f \text{ convergente}\right] \iff \left[\lim_{a^+} F \text{ existe}\right]$

$I =]a; b[$: $\left[\int_I f \text{ convergente}\right] \iff \left[\int_{]a;c]} f \text{ et } \int_{[c;b[} f \text{ cv pour } a<c<b\right]$

Si tel est le cas, on pose $\int_I f = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$

▶ Indépendant du choix de c.

▶ OK si f prolongeable par $\subseteq$: $\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f} \xrightarrow[x \to b^-]{} \int_a^b \tilde{f}$ pour $I = [a;b[$

▶ CN de cv si $b = +\infty$, $\lim_{+\infty} f$ existe : $\left[\int_a^b f \text{ cv}\right] \Rightarrow \left[\lim_{+\infty} f = 0\right]$

Ex $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\left[\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ cv}\right] \iff [\alpha > 1]$

$\left[\int_0^c \frac{dt}{t^\alpha} \text{ cv}\right] \iff [\alpha < 1]$

$f \geq 0$ sur un voisinage de b

- Théorème fondamental : $\left[\int_{[a;b[} f \text{ existe}\right] \iff [F \text{ majorée}]$

↳ Sur un voisinage de b, $f \geq 0$ donc F croissante, puis TLM.

- Critères de comparaison directe, avec o, O, $\sim$ sur un voisinage de b.

Intégrale absolument convergente

$\left[\int_a^b f \text{ acv}\right] \iff \left[\int_a^b |f| \text{ cv}\right]$

- acv $\Rightarrow$ cv, et si tel est le cas : $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

↳ Utiliser $f = f^+ - f^-$

▶ $\int_a^b f$ semi-convergente si $\int_a^b f$ converge mais pas $\int_a^b |f|$

▶ Extension des propriétés classiques : linéarité, positivité et cas d'égalité si f continue, croissance, Chasles, changement de variable, ...

↳ Se ramener à l'intégration sur des segments.

Fonction intégrable sur I $\quad \int_I f$ acv

- Intégration des relations de comparaisons

▶ L'ensemble $L_1C(I)$ des fonctions continues, intégrables sur I est un $\mathbb{C}$-ev normé par la norme de la convergence en moyenne $N_1 : f \mapsto \int_I |f|$

Fonction de carré intégrable sur I $\quad f^2$ intégrable sur I

▶ $\cdot|\cdot : (f,g) \longmapsto \int_I \tilde{f} g$ produit scalaire sur $L_2(I)$

▶ L'ensemble $L_2C(I)$ des fonctions continues, de carré intégrable sur I est un $\mathbb{C}$-ev normé par la norme de la convergence en moyenne quadratique $N_2 : f \mapsto \sqrt{\int_I |f|^2} = \sqrt{f|f}$

▶ $[f, g \in L_2(I)] \Rightarrow [fg \in L_1(I), \quad |f|g| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)\, N_2(g)]$

Théorème de convergence dominée (cvd)

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n, \quad f_n : I \to \mathbb{K} \quad \text{CPM} \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[I]{s} f \\ f : I \to \mathbb{K} \quad \text{CPM} \\ \forall n, \quad |f_n| \leq \varphi \quad \text{où} \quad \varphi : I \to \mathbb{K} \quad \text{CPM, intégrable} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \forall n, f_n$ intégrable, f intégrable, $\int_I f_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_I f$

↳ Admis

▶ Souvent, $\varphi = f$ convient

▶ Version "continue" : $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$, $\mu \in \bar{J}$ et $\lambda \to \mu$

Théorème d'intégration terme à terme (ITT)

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n, \quad f_n : I \to \mathbb{K} \quad \text{CPM, intégrable} \\ \sum_{n\geq 0} f_n \xrightarrow[I]{s} F \\ F : I \to \mathbb{K} \quad \text{CPM} \\ \sum_{n\geq 0} \int_I f_n \quad \text{convergente} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \int_I F$ et $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \int_I f_n$ existent et sont égaux

▶ $e^{-t} = o_{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

▶ Chgt de variable : $\mathcal{C}^1$, strt monotone. Essayer :
- $u = 1/t$
- f° trigo. $(ch^2 - sh^2 = 1)$
- morceaux d'expression

▶ IPP : choisir une constante d'intégration stabilisant l'expression

Intégrale dépendant d'un paramètre

$S: \begin{array}{l} A \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt \end{array}$ où :
- $A \subset E$ evn de dim finie
- I intervalle de $\mathbb{R}$
- $f: A \times I \to \mathbb{K}$ tq $f(x,\cdot)$ CPM, intégrable $\forall x$.

▶ " On reconnait une intégrale de variable d'intégration t et dépendant d'un paramètre x "

Domination de f par φ sur A

$\varphi : I \to \mathbb{R}$ CPM, intégrable tq $|f(x,\cdot)| \leqslant \varphi$ pour tout $x \in A$

Limite caractérisation séquentielle puis cvd

Continuité en $a \in A$

$\begin{cases} \forall x \ f(x,\cdot) \text{ CPM} \\ \forall t,\ f(\cdot,t) \ \mathcal{C} \text{ en } a \\ f \text{ dominée sur voisinage de } a \end{cases} \Longrightarrow S \ \mathcal{C} \text{ en } a$

Dérivation (formule de Liebniz) sur A

- A intervalle
- $\forall t$, $f(\cdot,t)$ $\mathcal{C}^1$ sur A, $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)$ existe et $\mathcal{C}$ — ($\mathcal{C}^p$ sur A, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\cdot,t)$ existe et $\mathcal{C}$ pour $k \leqslant p$)
- $\forall x$, $f(x,\cdot)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ CPM — ($\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)$ CPM pour $0 \leqslant k \leqslant p$)
- $\forall x$, $f(x,\cdot)$ intégrable — ($\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)$ intégrable pour $k \leqslant p-1$)
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ dominée sur tt segment — ($\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$ dominée sur tt segment)

$\Longrightarrow$ S $\mathcal{C}^1$ sur A — (S $\mathcal{C}^p$ sur A)

$\forall x$, $S'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ — ($\forall x$, $S^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,\cdot)$)

Fonction gamma d'Euler $\quad \Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$

- On reconnait une intégrale dépendant d'un paramètre. On pose $I = \mathbb{R}_+^*$, $f : A \times I \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ où A domaine de x.

- Γ est définie sur $A = \mathbb{R}_+^*$: Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - $f(x,\cdot)$ définie, continue, positive sur I
  - $f(x,t) = o_{\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{\infty} f(x,\cdot)$ existe

    $f(x,t) = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ donc $\left[\int_0^1 f(x,\cdot) \text{ existe}\right] \iff [x > 0]$

- $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) \underset{IPP}{=} x\,\Gamma(x)$ pour tout $x \in A$

- Γ continue sur A :
  - $\forall x$, $f(x,\cdot)$ CPM
  - $\forall t$, $f(\cdot,t)$ $\mathcal{C}$ sur A
  - f dominée sur tout segment $[a,b] \subset A$ par $\varphi_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$ qui est intégrable (déjà fait)

- Γ $\mathcal{C}^\infty$ sur A : et $\forall k,x$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1} e^{-t}\, dt$
  - A intervalle
  - $\forall t$, $f(\cdot,t)$ $\mathcal{C}^\infty$ sur A, et $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k f(x,t)$ $\forall x,t,k$
  - $\forall x,k$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)$ CPM, intégrable par croissances comparées
  - $\forall k$, $x \in [a;b] \subset A$: $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq |\ln t|^k \left(t^{b-1} + t^{a-1}\right) e^{-t}$ CPM, intégrable

    Donc $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ dominée sur tout segment, pour tout $k \in \mathbb{N}$

- Variations, graphe, comportements asymptotiques
  - $\Gamma^{(2)} \geq 0$ $\leadsto$ Γ convexe $\leadsto$ TLM $\leadsto$ $\lim_{\infty} \Gamma$ existe et $+\infty$ car $\Gamma(n) = (n-1)!$
  - $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ donc par théorème de Rolle, il existe $c \in]1;2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.
  - $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $\Gamma(x) \xrightarrow[0]{} +\infty$
  - $\frac{\Gamma(x)}{x} = \Gamma(x-1)\,\frac{x-1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ $\leadsto$ branche parabolique d'axe (Oy)